Diffusion dans une barre métallique

1) Eq diff $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = D \dfrac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2}$

Vérification de la solution : $\dfrac{\partial n(x,t)}{\partial t} = \dfrac{n_0}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(\dfrac{x^2}{4Dt^2} - \dfrac{1}{2t} \right)$

$$\frac{\partial^2 n(x,t)}{\partial x^2} = \frac{n_0}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \left(\left(\frac{x}{2Dt}\right)^2 - \frac{1}{2Dt} \right)$$

$\Rightarrow$ eq vérifiée !

$\left.\begin{array}{l} [\sqrt{4\pi D t}] = L \\ [n_x] = [dN]/[dx] = L^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow [n_0] = 1$ sans dimension.

2) $x = L$ et $\dfrac{n_{x,2}}{n_{x,1}} = 3$ $\Rightarrow$ $\dfrac{n_{x,2}}{n_{x,1}} = \left(\dfrac{t_1}{t_2}\right)^{1/2} e^{-\frac{L^2}{4D}\left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right)}$

$$\Rightarrow D = \frac{L^2 (1/t_1 - 1/t_2)}{4 \ln\left(\sqrt{\frac{t_2}{t_1}} \frac{n_{x,2}}{n_{x,1}} \right)}$$

AN : $D = 10^{-12}\,m^2 s^{-1}$

3) $\left[\dfrac{L^2}{D}\right] = T$ $\Rightarrow$ temps caractéristique de la diffusion.

AN : $\dfrac{L^2}{D} = \dfrac{(10^{-3})^2}{10^{-12}} = 10^6\,s = 11{,}57\,j$ processus lent.

1. En régime stationnaire et en l'absence de terme de création, la fonction $T_0(x)$, relative à une conductivité constante, s'obtient selon (cf. chapitre 11) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \text{Cte} = -\frac{J_{u,x}}{\lambda_0} \quad \text{et} \quad T(x) = -\frac{J_{u,x}}{\lambda_0}x + \text{Cte}$$

Comme $J_{u,x} = -\lambda_0(T_2 - T_1)/l$, il vient :

$$T_0(x) = \frac{T_2 - T_1}{l}x + T_1$$

2. a) Dans le cas considéré, où λ dépend de la température, on a, en régime sationnaire :

$$0 = \frac{\mathrm{d}J_u}{\mathrm{d}x} \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\lambda_0 \frac{T_0}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = A\,\mathrm{d}x \quad \text{d'où} \quad \ln\left(\frac{T}{B}\right) = Ax \quad \text{soit} \quad T = B \times \exp(Ax)$$

A et B étant deux constantes que l'on détermine à l'aide des conditions aux limites :

$$T(0) = T_1 = B \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{l}\ln\left(\frac{T_2}{B}\right) = \frac{1}{l}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Finalement :

$$T(x) = T_1 \exp\left[\frac{\ln(T_2/T_1)x}{l}\right]$$

b) La valeur moyenne de la température, entre A_1 et A_2, s'obtient selon :

$$\langle T \rangle = \frac{1}{l}\int_0^l T(x)\,\mathrm{d}x = \frac{T_1}{l}\int_0^l \exp\left(\frac{\ln(T_2/T_1)x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{T_1}{l}\frac{l}{\ln(T_2/T_1)}\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{x/l}\right]_0^l$$

Il vient, en effectuant :

$$\langle T \rangle = \frac{T_1}{\ln(T_2/T_1)}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \frac{T_2 - T_1}{\ln(T_2/T_1)} = \frac{600}{\ln 3} \approx 546\ \text{K}$$

c) Calculons la valeur du courant volumique d'énergie :

$$J_u = -\lambda_0 \frac{T_0}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\lambda_0 \frac{T_0}{T}AT = -\lambda_0 \frac{T_0}{l}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = -8,5\frac{1\,000}{0,2}\ln 3 = -46,7\ \text{kW}\cdot\text{m}^{-2}$$

3. Pour déterminer le point de l'axe Ox en lequel l'écart $f(x) = T(x) - T_0(x)$ est maximal, il suffit d'annuler la dérivée de $f(x)$:

$$f(x) = T_1 \exp\left[\frac{\ln(T_2/T_1)x}{l}\right] - \frac{T_2 - T_1}{l}x - T_1 \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = T_1 \frac{\ln(T_2/T_1)}{l}\exp\left[\frac{\ln(T_2/T_1)x}{l}\right] - \frac{T_2 - T_1}{l} = 0$$

Par conséquent :

$$(T_2/T_1))^{x/l} = \frac{T_2 - T_1}{T_1 \ln(T_2/T_1)} \quad \text{soit} \quad 3^{x/l} = \frac{600}{300 \ln 3} = 1,82 \quad \text{et} \quad x = 0,2\frac{\ln 1,82}{\ln 3} = 0,11\ \text{m}$$